

d'un sismomètre

La surveillance des mouvements du sol dus à la sismicité sont essentiels, car ils permettent de détecter les séismes et leurs conséquences potentiellement dévastatrices (tsunamis). A long terme, un des buts de cette surveillance est aussi de tenter de prévoir l'apparition d'un séisme en un lieu donné.

Pour cela, les scientifiques utilisent différents types de capteurs. On s'intéresse ici au sismographe.

Un sismographe enregistre les "vibrations" du sol dans une direction donnée. En pratique, pour obtenir les mouvements du sol à 3D, on place plusieurs sismographes dans 3 orientations orthogonales et on rassemble les différents signaux récupérés.

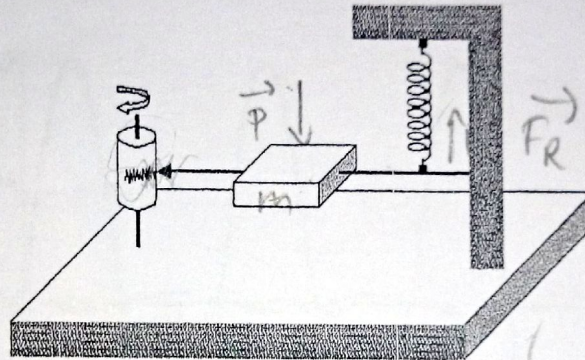


Figure 1 : Schéma d'un sismographe

Un sismographe enregistrant les vibrations verticales du sol peut qualitativement être modélisé par le schéma ci-dessus. Un mouvement vertical du sol provoque le tracé d'une courbe.

1. Modélisation du sismographe

On cherche à établir qualitativement une équation entre l'entrée $z_e(t)$ (l'altitude du sol) et la sortie z_s (l'altitude de la pointe traçante, identique à l'altitude de la courbe obtenue sur le papier). On considère que l'équation recherchée sera une équation différentielle linéaire d'ordre deux entre z_e et z_s .

La réponse aux questions de cette partie doit se faire sans aucun calcul.

1. L'équation du mouvement est due aux lois mécaniques, par exemple l'application du P.F.D. à la partie mobile du sismographe. Justifier l'ordre choisi pour l'équation différentielle.
2. On veut savoir à quelle grandeur cinétique liée au mouvement du sol le sismographe sera sensible. Pour cela, indiquer qualitativement si le sismographe doit
 - être-il sensible à la "position" du sol : la courbe obtenue sera-t-elle différente si le sol est dans une position constante z_{e1} ou une position z_{e2} ?
 - être sensible à la "vitesse" du sol : un mouvement du sol à une vitesse uniforme $\dot{z}_e$ provoquera-t-il une réponse non nulle ?
 - Être-t-il sensible à l'accélération $\ddot{z}_e$ du sol ?
3. Justifier alors que l'équation différentielle liant z_e à z_s peut s'écrire sous la forme canonique :

$$\ddot{z}_s + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_s + \omega_0^2 z_s = \ddot{z}_e$$

I. Etude fréquentielle

On se place désormais en régime sinusoïdal forcé afin de faire une étude fréquentielle.

1. A partir de l'équation différentielle donnée partie 1), déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{Z_s(j\omega)}{Z_k(j\omega)}$ et la mettre sous forme canonique.
2. A partir d'une étude asymptotique, justifier qu'une telle fonction de transfert correspond à un comportement de type passe-haut.

On donne le diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-haut d'ordre 2, sur lequel l'abscisse est la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

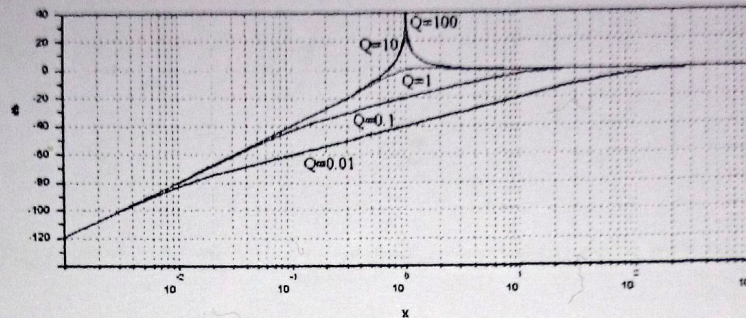


Figure 2 : Diagramme de bode en gain d'un filtre passe-haut d'ordre 2

Les propriétés de résonance éventuelle autour de la pulsation propre ω_0 vérifient exactement les mêmes lois que dans le cas d'un filtre passe-bas d'ordre 2. Le constructeur du sismographe doit donc choisir convenablement les valeurs de Q et ω_0 .

3. Compte de l'utilité de ce dispositif, discuter de la pertinence d'avoir un facteur de qualité faible ou élevé. On ne souhaite pas qu'il y ait résonance pour que le sismographe ne privilégie pas une fréquence. Donner une valeur probable de Q .

Les ordres de grandeurs des fréquences à détecter peuvent varier notablement, en fonction de l'application faite du sismographe. Certains signaux détectés par le sismographe peuvent être "parasites", ne concernant pas les mouvements naturels du sol. Dans la mesure du possible, le sismographe doit ne pas être sensible à de tels signaux.

On considère par exemple la surveillance d'une centrale électrique nucléaire située en bordure d'océan. Des vibrations "parasites" du sol peuvent être dues :

- la houle est un mouvement ondulatoire de vagues à la surface de l'océan, dû à l'interaction entre l'eau et le vent. La période de ce phénomène est d'une dizaine de secondes environ. Ces mouvements de grande quantité d'eau créent de légères vibrations dans le sol qui peuvent être détectées par les sismographes les plus précis.
- la marée est un autre phénomène de mouvement périodique de l'océan. Il se produit 2 marées hautes et 2 marées basses par jour.
- les alternateurs de la centrale électrique à protéger sont synchronisés sur la fréquence du réseau électrique, et peuvent créer des vibrations de 50 Hz.

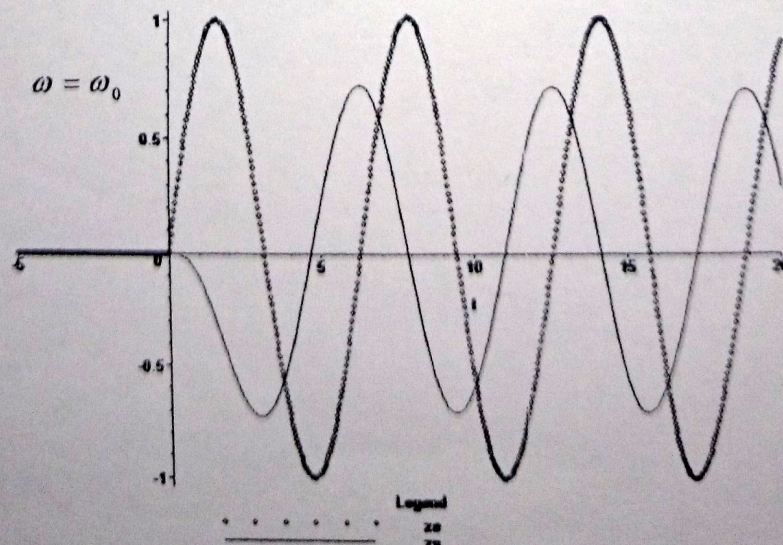
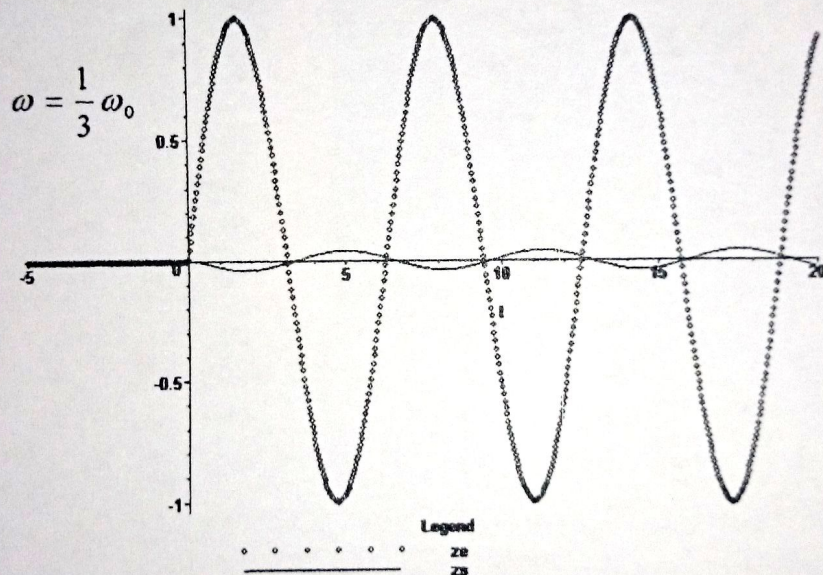
On considère l'exemple d'un sismographe devant détecter des fréquences de vibrations naturelles du sol de l'ordre de 1 Hz.

4. Donner un exemple concret de centrale électrique située à proximité de l'océan.
5. Sur un axe horizontal, gradué en fréquences en échelle logarithmique, représenter en ordre de grandeurs les fréquences de ces 4 phénomènes : houle, marée, alternateurs, vibrations naturelles à détecter. En déduire un ordre de grandeur de la pulsation propre ω_0 que doit posséder un sismographe adapté à cet exemple.
6. Pour un tel sismographe parmi les 4 phénomènes pris en compte (houle, marée, alternateurs, vibrations naturelles à détecter), quels sont ceux qui apparaîtront dans les signaux restitués par le sismographe ?

II. Etude temporelle

On considère un sismographe, de pulsation propre ω_0 . On considère qu'à partir de $t = 0$, le sol se met à vibrer avec une évolution sinusoïdale : on pose $z_e(t) = Z_{em} \sin(\omega t)$ pour $t \geq 0$.

On représente alors l'évolution de $z_e(t)$ et de la réponse $z_s(t)$ du sismographe pour différentes valeurs de ω :



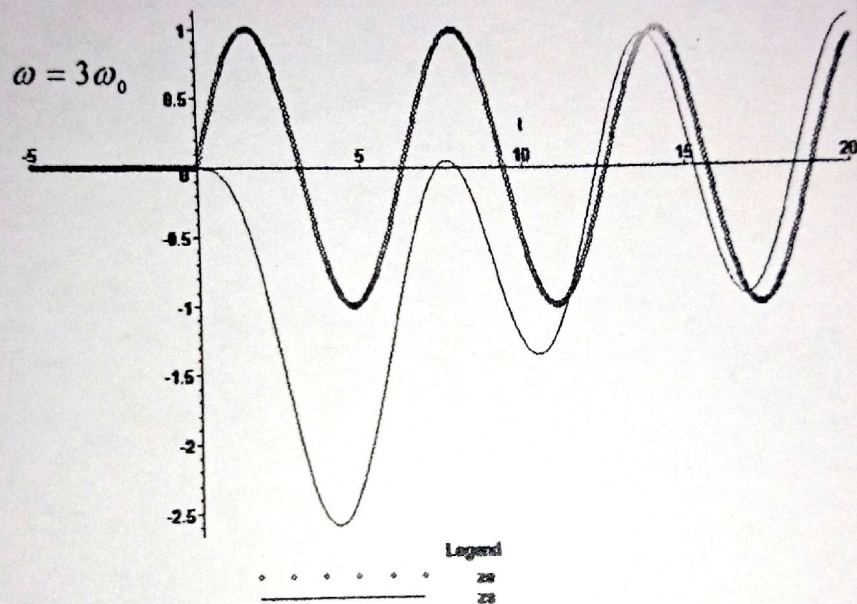


Figure 3 : Réponse du sismographe pour différentes valeur de la pulsation d'exciation

1. Expliquer qualitativement les 3 réponses obtenues.